TD 39-40 : Séries, familles sommables

Séries à termes positifs

1 ★☆ Déterminer la nature des séries suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2+(-1)^n}{3^n}$

2) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$

3) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\binom{n}{2}}$

4) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$

5) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2}$

6) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{3^n}$

7) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)$

8) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2-\ln n}$

9) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{\sqrt{1+n^2}}{n^3(\ln n)^3}$

10) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n}{(n-1)!}$

11) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(\ln n)^n}{n^{\ln n}}$

12) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{ch}(2n)}$

2 ★☆ Montrer la convergence et calculer la somme des séries suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{2^n}{3^{n-2}}$

2) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2-1}$

3) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+2n}$

4) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right)$

3 ★☆ Par une comparaison série-intégrale, montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k\ln(k)}$ est divergente.

4 ★☆ Soit $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une fonction strictement croissante. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^2}$ diverge.

5 ★★ Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors il en va de même des séries $\sum \ln(1+u_n)$, $\sum u_n^2$, et $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$.

6 ★★★ Étudier, selon la valeur de $p\in\mathbb{N}$, la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ avec $u_n = \dfrac{1!+2!+\ldots+n!}{(n+p)!}$.

Séries à termes quelconques

7 ★☆ Déterminer la nature des séries de terme général suivants :

1) $\dfrac{\sin n}{n^2+1}$

2) $(-1)^n\dfrac{\ln n}{n}$

3) $\dfrac{\cos(n\pi)}{n}$

4) $\sin\left(\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right)$

5) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - e$

6) $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$

7) $\sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1$

8) $\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)-\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

8 ★★ Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{8^n}{(2n)!}$ converge vers un réel négatif.

9 ★★

1) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

2) Montrer que $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \sim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

3) Démontrer que

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

4) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ diverge. Est-ce qu'il y a une contradiction avec la question 2 ?

10 ★★ (*Formule de Stirling*) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On pose

$$u_n = \frac{n!e^n}{n^n} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{u_n}{\sqrt{n}}$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln u_{n+1} - \ln u_n = \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

2) En déduire la nature de la série de terme général $v_n = \ln w_{n+1} - \ln w_n$.

3) En déduire que

$$\exists M > 0 \qquad n! \sim M\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Par les intégrales de Wallis, on déduit que $M = \sqrt{2\pi}$ et on obtient la formule de Stirling : $\boxed{n! \sim \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$

Familles sommables

11 ★☆ Montrer que $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=m}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$

12 ★☆ En utilisant le fait que $n+1 = \displaystyle\sum_{m=0}^{n} 1$, calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)3^{-n}$.

13 ★★ Montrer que :

1) la famille $\left(\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^m\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

2) la famille $\left(\frac{1}{x^2}\right)_{x\in\mathbb{Q}\cap[1,+\infty[}$ n'est pas sommable.

3) la famille $\left(\frac{1}{(n+m)^3}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.

4) $\left(\frac{1}{n^2+m^2}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ n'est pas sommable.

14 ★★ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^\alpha(n-k)^\alpha}$$

Pour quelles valeurs de α est-ce que la série $\sum u_n$ converge ?